CHƯƠNG 4

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

§1 HỆ CRAMER

1.1 ĐỊNH NGHĨA

Xét một hệ n *phương trình tuyến tính* n *ẩn:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x & = & b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Các số thực $x_1; x_2; \ldots; x_n$ là *các ẩn,* các số thực a_{ij} là *các hệ số của ẩn*, các số b_i là *các số hạng tự do.*

Nghiệm của hệ là một bộ n *số thực* $x_1; x_2; \ldots; x_n$ *thoả mãn mọi phương trình của hệ.*

Hệ (1) được gọi là hệ Cramer nếu định thức các hệ số của ẩn khác không.

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

1.2 QUY TẮC CRAMER

Xét hệ véc tơ cột của các hệ số của các ẩn tức là các cột của ma trận A:

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ thuộc không gian R^n.

Nếu các véc tơ đó phụ thuộc tuyến tính thì sẽ có một trong chúng là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ còn lại tức là một cột của định thức Δ là tổ hợp tuyến tính của các cột khác do đó $\det(A) = 0$. Vậy nếu $\det(A) \neq 0$ thì các véc tơ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ phải độc lập tuyến tính, chúng lập thành một cơ sở của R^n. Véc tơ cột B các số hạng tự do cũng là một véc tơ thuộc R^n nên nó được phân tích một cách duy nhất theo cơ sở đã chọn $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$B = x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n \qquad (2)$$

Các tọa độ của véc tơ $B\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ thoả mãn hệ phương trình (1) nên là nghiệm của hệ đó.

Như vậy ta đã chứng tỏ *hệ Cramer (hệ có $\det(A) \neq 0$) luôn luôn có nghiệm duy nhất.* Bây giờ ta tìm công thức biểu diễn nghiệm của hệ.

Ta ký hiệu lại định thức $\det(A)$ dưới dạng $D\left(A_1, A_2, \ldots, A_n\right)$.

Ta xét định thức: $\Delta_i = D\left(A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \ldots, A_n\right)$.

Thay B bởi (2) rồi dùng tính chất của định thức ta có thể phân tích Δ_i thành n định thức mà trong đó có $n-1$ định thức có hai cột tỷ lệ, chẳng hạn định thức $D\left(A_1, \ldots, A_{i-1}, x_1 A_1, A_{i+1}, \ldots, A_n\right)$.

Các định thức đó bằng không, ta chỉ còn lại một định thức có dạng: $D\left(A_1, \ldots, A_{i-1}, x_i A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n\right)$. Nó bằng $x_i \det(A) = x_i \Delta$. Như vậy ta có $\Delta_i = x_i \Delta$. Do $\Delta \neq 0$ ta suy ra $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}; i = 1, 2, \ldots, n.$

Ta có kết quả quan trọng sau:

Hệ phương trình tuyến tính (1) là hệ Cramer nếu nó thoả mãn điều kiện định thức các hệ số $\Delta \neq 0$. Khi đó hệ có nghiệm duy nhất được cho bởi công thức:

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}; i = 1, 2, \ldots, n.} \tag{3}$$

trong đó định thức Δ là định thức các hệ số của ẩn, Δ_i là định thức nhận được từ Δ bằng cách thay cột thứ i bằng cột hệ số tự do nằm ở vế phải của (1), tức là thay cột A_i bởi cột B.

Ví dụ: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 5 \end{cases}$$

Ta tính $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5.$ đó là hệ Cramer, nó có nghiệm duy nhất.

Ta tính các định thức $\Delta_i, i = 1,2,3$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -10; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -15;$$

Vậy nghiệm của hệ là:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 3.$$

Chú ý: Nếu ta ký hiệu A là ma trận các hệ số của hệ (1), X là ma trận cột các ẩn, B là ma trận cột các số hạng tự do thì dạng ma trận của hệ (1) là:

$$AX = B.$$

Với hệ Cramer, $\det(A) \neq 0$ nên ma trận A là khả nghịch, tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1}, từ đó ta có: $A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$

Ta có thể tìm nghiệm của hệ Cramer bằng cách tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trận A rồi tính tích của hai ma trận A^{-1} và B.

§2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH TỔNG QUÁT

2.1 ĐIỀU KIỆN TƯƠNG THÍCH

Xét hệ phương trình tuyến tính tổng quát m phương trình n ẩn:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ \ldots\ \ldots.\ \ldots \quad \ldots. & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \qquad (4)$$

Nghiệm của hệ là một bộ n số thực $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ thoả mãn mọi phương trình của hệ.

Hệ (4) được gọi là *tương thích* nếu nó có ít nhất một nghiệm.

Ta sẽ tìm xem với điều kiện nào thì hệ (4) là tương thích?

Gọi A là ma trận các hệ số của hệ, A là ma trận loại $(m \times n)$.

$\overline{A}$ là ma trận nhận được từ A bằng cách thêm cột các số hạng tự do vào cột cuối, ta gọi nó là ma trận mở rộng của A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Điều kiện tương thích (Kronecker - Capelli).

Để hệ (4) là tương thích thì cần và đủ là hạng của ma trận A bằng hạng của ma trận mở rộng $\overline{A}$

Thật vậy, giả sử hệ (4) là tương thích, tức là tồn tại nghiệm $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ để: $B = x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_nA_n$

Ta thấy rằng cột cuối cùng của ma trận $\overline{A}$ khi đó là tổ hợp tuyến tính của các cột còn lại, do đó khi bỏ cột đó đi thì hạng của ma trận không thay đổi, nhưng khi đó ma trận còn lai chính là ma trận A, vậy hạng của A bằng hạng của $\overline{A}$.

Đảo lại, nếu hạng$(A) =$ hạng$\left(\overline{\text{A}}\right) = r$ thì trong A sẽ chứa ít nhất một định thức cấp r khác không. Bằng cách đổi chỗ các hàng và các cột của A (không làm thay đổi hạng của nó) ta có thể giả thiết rằng định thức khác không đó nằm ở vị trí r hàng đầu và r cột đầu. Khi đó r véc tơ cột $A_1, A_2, \dots, A_r$ là độc lập tuyến tính và ta coi chúng là các véc tơ cơ sở. Vì hạng$(A) = r$ nên các véc tơ cột B là tổ hợp tuyến tính của $A_1, A_2, \dots, A_r$:

$$B = \alpha_1A_1 + \alpha_2A_2 + .. + \alpha_rA_r$$

Ta đặt: $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_r = \alpha_r, x_{r+1} = x_{r+2} = \dots = x_n = 0.$

Bộ n số thực $\left(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r, 0, \dots, 0\right)$ sẽ là một nghiệm của hệ (4).

Vậy hệ (4) là tương thích.

2.2 CÁCH GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH TỔNG QUÁT.

Giả sử hệ (4) tương thích và có hạng là r. Khi đó ma trận A của nó chứa r cột độc lập tuyến tính $A_1, A_2, \dots, A_r$.

Do ta chọn các cột $A_1, A_2, \dots, A_r$ làm *các véc tơ cơ sở* nên các ẩn $x_1, x_2, \dots, x_r$ tương ứng với chúng được gọi là *các ẩn cơ sở*. Nếu $r < n$ thì hệ có vô số nghiệm. Ta có thể gán cho các ẩn $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ các giá trị tuỳ ý (ta gọi chúng là *các ẩn tự do*). Khi đó hệ với các ẩn là $x_1, x_2, ..., x_r$ sẽ là một hệ Cramer (vì có định thức các hệ số khác không). Ta có thể tìm các ẩn đó theo quy tắc Cramer. Nếu $r = n$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

Ví dụ 1: Xét hệ:

$$\begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x + 2y - z &= -1 \\ x + \quad 3z &= 3 \\ 2x + y + 4z &= 4 \end{cases}$$

Ma trận các hệ số A và ma trận mở rộng $\overline{A}$ đều có hạng 2 và do định thức cấp hai ở góc trái khác không, nên ta giữ lại hai phương trình đầu và các ẩn x, y làm các ẩn cơ sở còn ẩn z là tuỳ ý. Ta có hệ Cramer:

$$\begin{cases} x + y &= 1 - z \\ x + 2y &= -1 + z \end{cases}$$

Từ đó: $x = 3 - 3z; y = -2 + 2z; z$ tuỳ ý.

Ví dụ 2: Xét hệ:

$$\begin{cases} x + 2y - z &= 1 \\ 2x + y + 2z &= 2 \\ x - 4y + 7z &= 3 \end{cases}$$

Định thức các hệ số $\det(A) \neq 0$. Định thức cấp hai ở góc trái $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ nên hạng ma trận A bằng 2. Ma trận mở rộng $\overline{A}$ chứa định thức cấp 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 8.$$

Vậy hạng ma trận $\overline{A} = 3$. Hệ đã cho không tương thích.

2.3 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

1. Định nghĩa. Nếu cột số hạng tự do ở vế phải của (4) bằng không, tức là:

$$b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$$

thì ta có *hệ thuần nhất*.

Như vậy, *một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có dạng:*

$$\sum a_{ij}x_j = 0, i = 1,2,\ldots,m. \qquad (5)$$

Do ma trận mở rộng chứa một cột gồm toàn phần tử không nên hạng của nó luôn bằng hạng của ma trận A. Vậy hệ (5) là tương thích. Ta thấy ngay một nghiệm của nó là $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$. Ta gọi nghiệm này là *nghiệm tầm thường.*

2. Điều kiện để hệ thuần nhất có nghiệm khác nghiệm tầm thường

Ta xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có số phương trình bằng số ẩn tức là $m = n$. Khi đó, nếu $\det(A) \neq 0$, nó là hệ Cramer. Nghiệm duy nhất của nó là nghiệm tầm thường.

Như vậy, *để hệ thuần nhất có nghiệm khác tầm thường thì định thức các hệ số của ẩn phải bằng không*: $\det(A) = 0$

Khi đó hạng của ma trận $A = r < n$ và ta sẽ giải hệ theo r ẩn cơ sở như đã trình bày ở trên.

Ví dụ: Tìm nghiệm khác không của hệ thuần nhất:

$$\begin{cases} 2x + y - z & = & 0 \\ x + 2y + z & = & 0 \\ 3x + y - 2z & = & 0 \end{cases}$$

Ta có $\det(A) = 0$ và $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$ nên hệ có hạng 2. Ta chọn x và y làm ẩn cơ sở và cho $z = \alpha$ tuỳ ý ta được: $x = \alpha, y = -\alpha, z = \alpha$ với α tuỳ ý.

§3. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP GAUSS

Ta xét hệ m phương trình n ẩn:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \qquad (4)$$

Giả sử hệ số $a_{11} \neq 0$ (nếu không ta chỉ việc đổi chỗ các phương trình). Ta sẽ dùng phương trình đầu để khử ẩn x_1 từ $m-1$ phương trình sau. Khi đó ta nhận được một hệ $m-1$ phương trình với $n-1$ ẩn (không có ẩn x_1). Ta lại dùng phương trình đầu của hệ mới nhận được này để khử ẩn x_2 ở các phương trình đứng sau (giả thiết hệ số của ẩn x_2 của phương trình đó là khác không), ta sẽ được một hệ $m-2$ phương trình với $n-2$ ẩn (không có ẩn x_1 và x_2). Ta cứ tiếp tục như vậy để khử dần dần các ẩn cho đến khi chỉ còn một phương trình. Ta dùng phương trình này để tìm ẩn (có thể là một hoặc nhiều ẩn), sau đó tìm các ẩn còn lại từ các phương trình đứng trên. Trong quá trình khử ẩn có thể xảy ra các tình huống sau:

a) Mọi hệ số của ẩn đều bằng không, vế phải cũng bằng không. Khi đó ta bỏ phương trình đó đi vì nó là hệ quả của các phương trình khác (đó chính là bỏ một hàng chứa toàn phần tử không của ma trận).

b)Mọi hệ số của ẩn đều bằng không, vế phải khác không. Khi đó hệ đã cho là không tương thích vì nó chứa một phương trình không được thoả mãn với bất kỳ giá trị nào của ẩn (đó là trường hợp hạng ma trận các hệ số khác hạng ma trận mở rộng).

Cách khử liên tiếp các ẩn được tiến hành như sau:

Ta có hệ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \qquad (4)$$

Giả sử $a_{11} \neq 0$ (nếu không chỉ việc đổi chỗ các phương trình rồi đánh số lại).

Bước 1: Chia cả hai vế của phương trình đầu cho a_{11}.

Lấy phương trình thứ hai trừ đi phương trình đầu mới sau khi đã nhân nó với a_{21}

Lấy phương trình thứ ba trừ đi phương trình đầu mới sau khi đã nhân nó với a_{31}

Ta được hệ:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n & = & b_1' \\ \qquad b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n & = & b_2' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \qquad b_{m2}x_2 + \ldots + b_{mn}x_n & = & b_m' \end{cases}$$

trong đó: $b_{1i} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}, j = 1,2,\ldots,n; b_1' = \dfrac{b_1}{a_{11}};$

$$b_{\text{ij}} = a_{\text{ij}} - a_{i1}b_{1j}, b_i' = b_i - a_{i1}b_1', i = 2,3,\ldots,m; j = 2,3,\ldots,n;$$

Bước 2: Ta lại giả thiết $b_{22} \neq 0$ và lại áp dụng thuật toán trên để khử ẩn x_2 từ $m-2$ phương trình sau ta sẽ đi tới hệ:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \ldots + b_{1n}x_n & = & b_1' \\ \qquad x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n & = & b_2'' \\ \qquad\qquad c_{33}x_3 + \ldots + c_{3n}x_n & = & b_3'' \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \qquad\qquad c_{m3}x_3 + \ldots + c_{mn}x_n & = & b_m'' \end{cases}$$

Ta lặp lại thuật toán đó cho các bước tiếp theo cuối cùng sẽ đi tới ma trận các hệ số có dạng hình thang hoặc hình tam giác trên.

Vì ta chỉ thực hiện các phép biến đổi trên các hệ số nên khi trình bày các bước liên tiếp ta chỉ cần viết các hệ số của ẩn.

Ví dụ: Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 & = & 1 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 + 7x_5 & = & 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 & = & 0 \\ -x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 9x_4 + 7x_5 & = & a \end{cases}$$

Ta viết lại bảng các hệ số của ẩn và cột số tự do:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -1 & -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & -1 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -4 & 9 & 7 & a \end{array}$$

Bước 1: Giữ nguyên hàng đầu (vì a_{11} đã bằng 1); Đem nhân hàng hai trừ hàng đầu, đem hàng ba cộng hàng đầu, đem hàng tư cộng hàng đầu nhân với 2:

$$\left.\begin{array}{rrrrr}1 & -1 & -1 & -3 & 1\\ 0 & 2 & -4 & 2 & 6\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & -6 & 3 & 9\end{array}\right|\begin{array}{l}1\\ 1\\ 1\\ a+2\end{array}$$

Bước 2: Đem hàng hai chia cho 2 rồi đem hàng ba trừ đi hàng hai mới nhận được và hàng tư trừ đi 3 lần hàng hai nói trên:

$$\left.\begin{array}{rrrrr}1 & -1 & -1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 3 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right|\begin{array}{l}1\\ 1/2\\ 1/2\\ a+1/2\end{array}$$

Ở dòng cuối cùng ta có: $0 = a + \dfrac{1}{2}$.

Nếu $a \neq -1/2$ hệ đã cho vô nghiệm.

Nếu $a = 1/2$ ta bỏ dòng cuối cùng đi.

Như vậy dòng thứ ba có nghĩa là: $3x_3 - 2x_4 + x_5 = 1/2$;

Ta coi x_4 và x_5 là các ẩn tuỳ ý, x_3, x_2 và x_1 là các ẩn cơ sở, ta có:

$$x_3 = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5;$$

Dòng thứ hai có nghĩa là: $x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1/2$.

Ta thay giá trị của x_3 vừa tính được ở trên và rút ra x_2:

$$x_2 = \frac{5}{6} + \frac{1}{3}x_4 - \frac{7}{3}x_5;$$

Dòng đầu có nghĩa là: $x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 = 1$.

Thay giá trị của x_2 và x_3 vừa tính được rồi rút ra x_1:

$$x_1 = 2 + 4x_4 - 3x_5.$$

Tóm lại, với $a \neq 1/2$ hệ đã cho vô nghiệm;

với $a = 1/2$ hệ đã cho có nghiệm là:

$$x_1 = 2 + 4x_4 - 3x_5;$$
$$x_2 = \frac{5}{6} + \frac{1}{3}x_4 - \frac{7}{3}x_5;$$
$$x_3 = \frac{1}{6} + \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5;$$
x_4 và x_5 là tuỳ ý

Chú ý: Trong việc giải hệ phương trình tuyến tính Cramer bằng phương pháp Gauss ta đã đưa phương trình ma trận $AX = B$ về phương trình $A'X = B'$ trong đó A' là ma trận tam giác trên (tức là ma trận có mọi phần tử nằm dưới đường chéo chính bằng không). Sau khi tìm được ẩn x_n ta lại phải dùng các phép biến đổi để tìm dần các ẩn đứng trên. Điều đó có nghĩa là ta đã dùng các phép biến đổi để đưa ma trận A' về ma trận đơn vị. *Các phép biến đổi đó chính là các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận* A'. Đưa ma trận A về ma trận I có nghĩa là đã nhân bên trái của A với ma trận nghịch đảo A^{-1}. Ta được:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \text{ hay } X = A^{-1}B.$$

Như vậy phép biến đổi nói trên đã đưa ma trận B về ma trận nghiệm.

Ta thực hiện các phép biến đổi đó theo trình tự sau:

Đầu tiên ta viết ma trận A các hệ số và ma trận B cột số tự do:

$$A|B$$

Bằng phương pháp Gauss ta biến đổi cả hai ma trận sao cho ma trận A trở thành ma trận tam giác trên A'. Sau đó ta lấy hàng $n-1$ của A' trừ đi hàng n của nó được nhân với một số thích hợp sao cho phần tử thứ n của hàng đó bằng không. Ta lại lấy hàng $n-2$ trừ đi một tổ hợp tuyến tính của các hàng $n-1$ và n để làm cho mọi phần tử trên hàng $n-2$, trừ phần tử nằm trên đường chéo chính, đều bằng không và cứ thế tiếp tục cho các hàng ở trên đến khi ta đưa được A' về ma trận đơn vị. Ta có thể áp dụng phương pháp trên để tìm ma trận đơn vị. Muốn vậy ta sẽ viết trên cùng một hàng 3 ma trận: A, I, B rồi bằng các phép biến đổi sơ cấp ta đưa về 3 ma trận: I, A^{-1}, X.

$$A|I|B$$
$$A^{-1}A|A^{-1}I|A^{-1}B$$
$$I|A^{-1}|X$$

Ví dụ: Giải hệ phương trình có kết hợp tìm ma trận nghịch đảo của ma trận các hệ số A.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \end{cases}$$

Ta viết 3 ma trận A, I, B:

$$\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$

Đem hàng hai trừ hai lần hàng một, hàng ba trừ hàng một:

$$\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 1 & - & -9 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

Đem hàng hai chia cho 3, hàng ba cộng hai lần hàng hai mới:

$$\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 5 \end{array}$$

Nhân hàng ba với 3/5:

$$\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 3 \end{array}$$

Đến đây ta đã đưa ma trận A về dạng tam giác trên A'; ta tiếp tục biến đổi để đưa ma trận A' về ma trận đơn vị I:

Đem hàng hai trừ 3 lần hàng một, hàng một trừ hàng ba:

$$\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 3 \end{array}$$

Đem hàng một trừ hàng hai, khi đó ma trận A' sẽ trở thành ma trận đơn vị I :

$$\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 3 \end{array}$$

Như vậy ta có nghiệm của hệ là: $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3.$

Ma trận nghịch đảo A^{-1} của ma trận A các hệ số của phương trình là ma trận ở ngăn giữa.

BÀI TẬP

4.1 Giải hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\begin{cases} 3x+2y+4z &= 1 \\ 2x-y+z &= 0 \\ x+2y+3z &= 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-y-z-t &= -1 \\ x-2y+z+t &= -2 \\ x+y-2z+t &= 4 \\ x+y+z-2t &= -8 \end{cases}$$

4.2 Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x-y+3z &= 1 \\ -4x+2y+z &= 3 \\ -2x+y+4z &= 4 \\ 10x-5y-6z &= -10 \end{cases}$$

4.3 Giải và biện luận theo tham số m hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x+y+(1-m)z &= m+2 \\ (1+m)x-y+2z &= 0 \\ 2x-my+3z &= m+2 \end{cases}$$

4.4 Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_4-6x_5 &= 0 \\ x_2+x_3-3x_4+2x_5 &= 0 \\ 6x_1-3x_2+7x_4-10x_5 &= 0 \\ 2x_1+x_3+x_4+12x_5 &= 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2+x_3-3x_4+2x_5 &= 6 \\ 2x_1-x_2+2x_4-6x_5 &= 4 \\ 6x_1-3x_2+7x_4-10x_5 &= -8 \\ 2x_1+x_3+x_4+12X_5 &= 15 \end{cases}$$

4.5 Bằng các phép biến đổi sơ cấp hãy tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4.6 Khảo sát theo các giá trị của tham số thực a hạng và tính khả giải (có lời giải) của hệ:

$$\begin{cases} ax + y + z + t &= 1 \\ x + ay + z + t &= a \\ x + y + az + t &= a^2 \end{cases}$$

4.7 Biện luận và giải hệ:

$$\begin{cases} ax + y + z &= \alpha \\ x + ay + z &= \beta \\ x + y + az &= \gamma \end{cases}$$

Trong đó a, α, β, γ là các số cho trước.